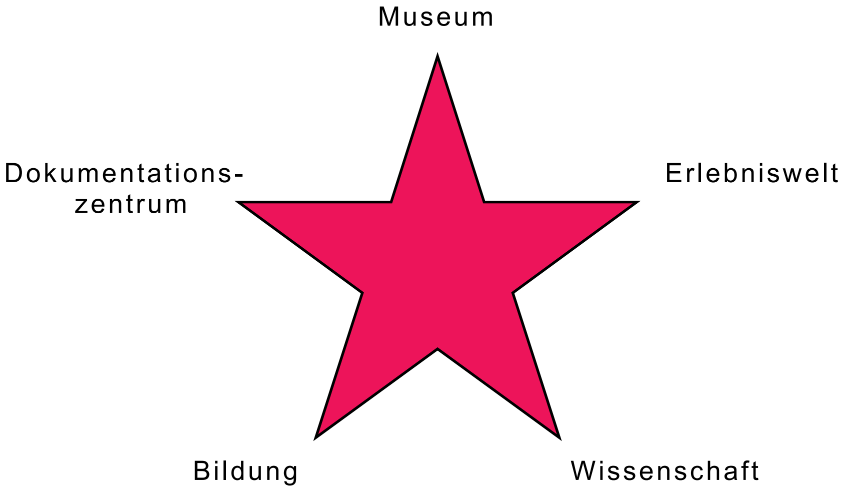
MATHEMATISCHE HINTERGRÜNDE VON SPIELEN IM HAUS DER MATHEMATIK

Gerhard Lindbichler

Das **HAUS DER MATHEMATIK (HdMa)** wurde 2003 nach einem Konzept von ***Prof. Mag. Dr. Gerhard Lindbichler*** (vormals PÄDAK-Wien-Bund) und ***Ao. Univ. Prof. Mag. Dr. Manfred Kronfellner*** (TU-Wien) in Wieden, Waltergasse 16, eröffnet. Hauptziel ist eine Popularisierung der Mathematik mit neuen ungewöhnlichen didaktischen Maßnahmen zu erreichen. Nach nun 6-jähriger Laufzeit hat sich herausgestellt, dass alle Erwartungen sich nicht nur erfüllt haben, sondern bei weitem übertroffen wurden. Nach einer vorerst ***„linearen“*** konnte eine ***„exponentielle***“ Entwicklung registriert werden.

Das HdMa ist vergleichbar mit einem Pentagramm, das von 5 Säulen getragen wird:



Bevor SchülerInnen(ab der 4. bis 12./13. Schulstufe) in die ERLEBNISWELT eintauchen, startet das Besuchsprogramm (ca. 2 Stunden) mit einem „***mathematischen Aufwärm-training***.“ Dazu ein Beispiel: es gibt bekanntlich Kanäle mit runden bzw. rechteckigen (quadratischen) Kanaldeckeln (Abb.1). Warum kann einer dieser Deckeln für den Berufsstand Kanalräumer lebensgefährlich werden?


Abb. 1


Abb. 2

Kreisrunde Kanaldeckeln können in keiner Position in den Kanal abstürzen, während quadratische Kanaldeckeln das sehr wohl können, da die Länge der Diagonale im Quadrat größer ist als eine Quadratseite. Aus der Sicht der Mathematik ist es nun interessant wie lang so eine Diagonale ist. Ab der 7./8. Schulstufe ist es möglich mithilfe des *Pytha-*

goräischen Lehrsatzes zum Resultat d = a.$\sqrt{2}$ zu gelangen, wobei es bei dieser Problemlösung auch sinnvoll ist den Zahlencharakter von $\sqrt{2}$ = 1, 4142 zu erwähnen. Wie kann nun aber ein Schüler oder ein Handwerker zu einem vernünftigen Resultat ohne Kenntnis von Pythagoras kommen? In diesem Fall verweisen wir die SchülerInnen auf die Bodenstruktur im HdMa (Abb. 2). Wie man im unteren Teil des Fotos erkennen kann, hat der Fliesenleger an die Diagonalen von quadratischen Fliesen solche mit der Länge einer Quadratseite immer wieder angelegt. Betrachtet man den Anfang einer quadratischen Fliese und einer Diagonale bis zu einem Endpunkt, so ist es möglich durch Abzählen, näherungsweise (rationalwertig) die $\sqrt{2}$ zu bestimmen.

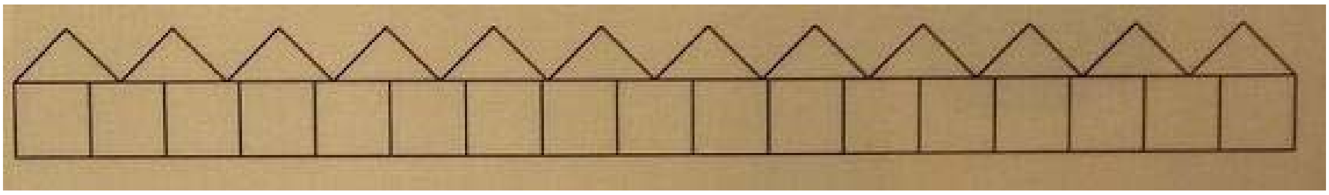


Abb. 3

Das erste brauchbare Ergebnis (Abb. 3) liefert 7 Quadratfliesen zu 5 Diagonalen (7:5 = 1, 4), das nächste 17 Quadratfliesen zu 12 Diagonalen (17:12 = 1, 4166…) usw. Wir fragen uns nun, ob bei diesem Vorgang ein System dahinter steckt? Dazu gehen wir von dem klassischen Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ aus. Wir nehmen an, dass $\sqrt{2}$ rational ist mit den üblichen Randbedingungen, also $\sqrt{2}$= m/n oder nach Quadrieren 2 = m^2/n^2 oder m^2 = 2.n^2 oder $m^2 - 2n^2 = 0$. Wegen der Irrationalität ist diese Bedingung aber nicht möglich. Für eine ganzzahlige Lösung wäre für eine brauchbare Näherung die Gleichung $m^2 - 2n^2 = +$ (-)1 interessant. Wir suchen über eine Excel-Tabelle Quadratzahlen und das Doppelte von Quadratzahlen die sich um 1unterscheiden:

n	n²	2n²	n	n²	2n²
1	1	2	22	484	968
2	4	8	23	529	1058
3	9	18	24	576	1152
4	16	32	25	625	1250
5	25	50	26	676	1352
6	36	72	27	729	1458
7	49	98	28	784	1568
8	64	128	29	841	1682
9	81	162	30	900	1800
10	100	200	31	961	1922
11	121	242	32	1024	2048
12	144	288	33	1089	2178
13	169	338	34	1156	2312
14	196	392	35	1225	2450
15	225	450	36	1296	2592
16	256	512	37	1369	2738
17	289	578	38	1444	2888
18	324	648	39	1521	3042
19	361	722	40	1600	3200
20	400	800	41	1681	3362
21	441	882	42	1764	3528

Wir erkennen die Lösungspaare (3 | 2), (7 | 5), (17 | 12), (41 | 29), usf. Wir haben die Lösungen einer speziellen diophantischen Gleichung, der sogenannten ***Pellschen Gleichung*** gefunden. Eine diophantische Gleichung der Form $x^2 - dy^2 = +(-)1$ für ein positiv ganzzahliges **d** heißt ***Pellsche Gleichung*** (nach *John Pell*, 1610 – 1685). Ist d eine Quadratzahl, so besitzt die Gleichung nur die trivialen Lösungen [+(-)1 | 0] und [0 | +(-)1] für d = 1. Andernfalls gibt es unendlich viele Lösungen, die man mit der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ bestimmen kann.

Ein anderes Beispiel für ein passendes Aufwärmtraining läuft über einen bekannten *Zaubertrick* für z. B. eine Altersbestimmung mithilfe von Zauberkarten. Den mathematischen Hintergrund liefert die Zahlendarstellung im Dual- oder Binärsystem:

1	**3**	**5**	**7**	**9**	**11**	**13**	**15**
17	**19**	**21**	**23**	**25**	**27**	**29**	**31**
33	**35**	**37**	**39**	**41**	**43**	**45**	**47**
51	**53**	**55**	**57**	**59**	**61**	**63**	

2	**3**	**6**	**7**	**10**	**11**	**14**	**15**
18	**19**	**22**	**23**	**26**	**27**	**30**	**31**
34	**35**	**38**	**39**	**42**	**43**	**46**	**47**
50	**51**	**54**	**55**	**58**	**59**	**62**	**63**

4	**5**	**6**	**7**	**12**	**13**	**14**	**15**
20	**21**	**22**	**23**	**28**	**29**	**30**	**31**
36	**37**	**38**	**39**	**44**	**45**	**46**	**47**
52	**53**	**54**	**55**	**60**	**61**	**62**	**63**

8	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
24	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**
40	**41**	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**
56	**57**	**58**	**59**	**60**	**61**	**62**	**63**

16	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**
24	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**
48	**49**	**50**	**51**	**52**	**53**	**54**	**55**
56	**57**	**58**	**59**	**60**	**61**	**62**	**63**

32	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**
40	**41**	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**
48	**49**	**50**	**51**	**52**	**53**	**54**	**55**
56	**57**	**58**	**59**	**60**	**61**	**62**	**63**

Nach Auflösung des Tricks *„erfinden“* wir eine neue Uhr (ist möglich ab der 4. Schulstufe nach Einführung von 2er Potenzen; Abb. 5). Zu diesem Zweck haben wir im HdMa eigens eine Leiste mit Lämpchen und zugehörigen Potenzen gebaut (Abb. 4). Damit können Stunden und Minuten dargestellt werden. z.B**. 9 Uhr 27 Minuten:**

$9 = 8 + 1 = 1.2^3 + 0.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0 = 1001$; **$27 = 16 + 8 + 2 + 1 = 11011$**

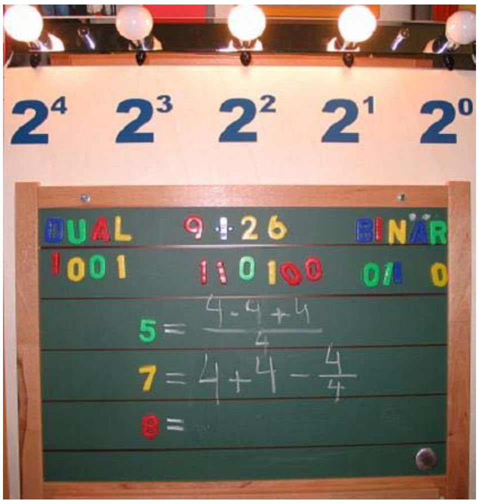


Abb. 4

Abb. 5

In Abb. 4 sieht man auch auf der Tafel Beispiele des ***„Vier-Vierenspiels“*.** Bei dieser *kreativen Mathematik* sollen die natürlichen Zahlen von 1 bis 10 mit 4 Vieren und den 4 Grundrechnungsarten dargestellt werden.

In der **ERLEBNISWELT**, die auch als **SCIENCE CENTER** bezeichnet werden kann, befinden sich derzeit über 60 Spiele mit mathematischem Hintergrund. Das besondere dabei ist, dass alle Spiele in die Spieltischplatten integriert wurden (entworfen von einem Architekten und professionell ausgeführt von einem Tischler). Wir versuchen dabei u.a. mathematische Formeln zu visualisieren. Dazu ein Beispiel:
Es ist bekannt, dass gilt: $\mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2 = n.(n+1).(2n+1)/6}$ oder
$6.(1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots\ldots\ldots + n^2) = n.(n+1).(2n+1)$. Visualisiert man die rechte Seite der Gleichung so haben wir etwas wie Länge x Breite x Höhe, also das Volumen eines Quaders. Links wir die Summe der Quadratzahlen mit 6 multipliziert. Baut man daher für z.B. $1^2 + 2^2 + 3^2$ einen Bauteil, so können theoretisch 6 gleiche Teile einen Quader von 3 x 4 x 7 bilden. Die Frage ist nur, wie soll man die visualisierten Quadratzahlen zusammenkleben, dass die gewünschte Lösung entsteht. Herr *Franz Vrabec*, Mitarbeiter des HdMa, hat nachfolgende Version vorgeschlagen (Abb. 6, 7).

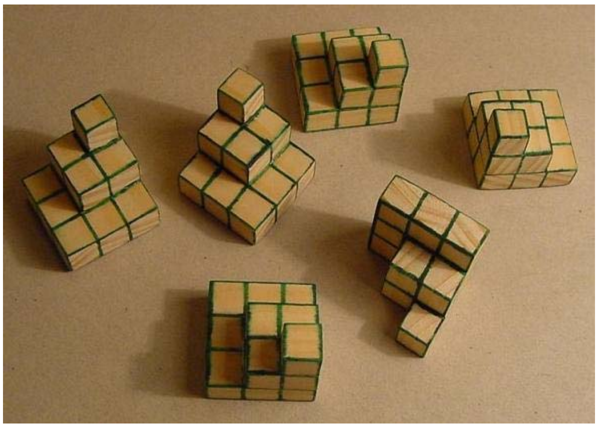


Abb. 6

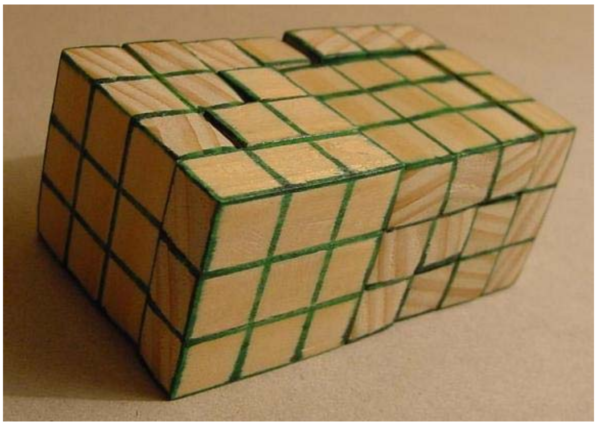


Abb. 7

Mir ist aufgefallen, dass bei Addition der natürlichen Zahlen von **2** bis **7,** nach der Formel $(a_1 + a_n).n/2$ der Summenwert **27**, also eine Kubikzahl (3 x 3 x 3) entsteht.Auch hier war das Problem, Einheitswürfel für die Visualisierung der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6 und 7 so zusammenzukleben, dass auch tatsächlich ein Würfel zusammengestellt werden kann. Das nachfolgende Foto zeigt diese Möglichkeit (Abb. 8).*Franz Vrabec* hat dazu auch eine andere Version gefunden

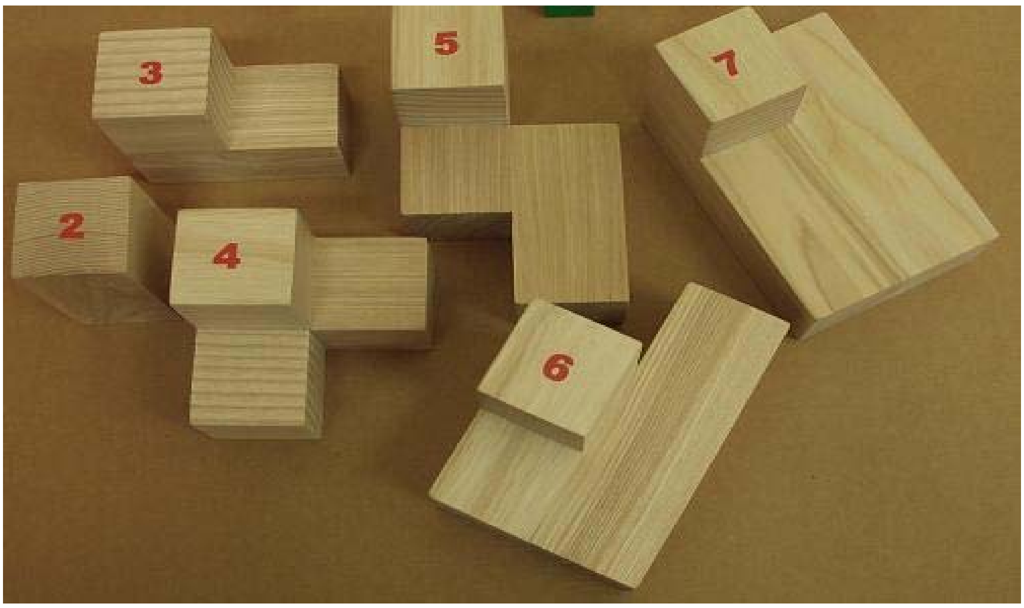


Abb. 8

Ein weiteres Beispiel für ein Spiel mit mathematischem Hintergrund ist das klassische Puzzle ***Ei des Columbus*** (Abb. 9 und Abb. 10)

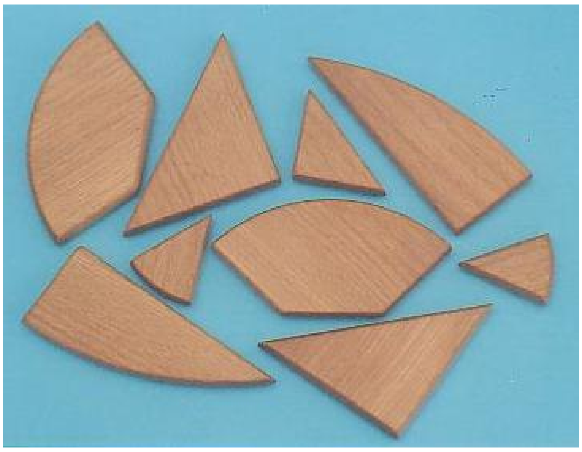


Abb. 9

Abb. 10

Es ist bekannt, dass eine Kegelschnittslinie wie z.B die ***Ellipse*** nur mit Zirkel und Lineal allein nicht konstruierbar ist. Wir brauchen dazu zusätzliche Zeichenhilfen. Im Gegensatz dazu ist die sogenannte ***Eilinie*** sehr wohl nur mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wie man sehr leicht aus der Skizze entnehmen kann (Abb. 11). Ebenso ist bekannt, dass man auch eine ***Scheinellipse*** ohne zusätzliche Zeichenhilfen konstruieren kann (Abb. 12).

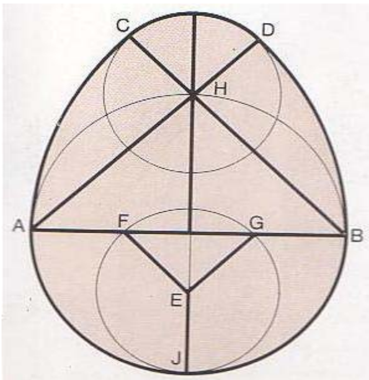


Abb. 11

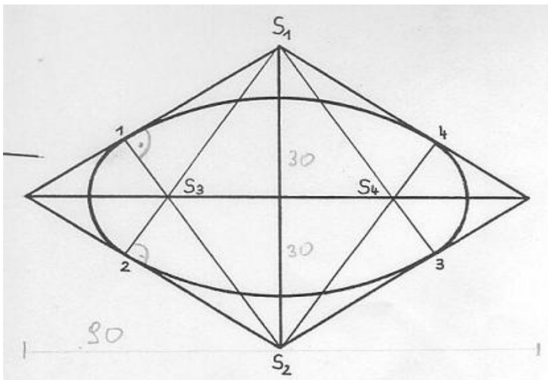


Abb. 12

Bei einem sehr beliebten HANDS-ON-SPIEL im HdMa lernen SchülerInnen sehr rasch die beiden geometrischen Figuren ***PENTAGON*** und ***PENTAGRAMM*** mithilfe eines Puzzles, bestehend aus nur 5 Teilen, kennen (Abb. 13 und Abb. 14).

Abb. 13

Abb. 14

Ein sehr interessantes Problem ist die ***„Quadratur regelmäßiger n-Ecke***“. Dabei sollen die n - Ecke in möglichst wenig Puzzleteile derart zerschnitten werden, dass daraus ein Quadrat gelegt werden kann. Bereits 1907 veröffentlichte ***H. E. Dudeney*** (1847–1930) unter der Bezeichnung *Kurzwarenhändler-Problem* in seiner ersten Rätselsammlung *„The Canterbury Puzzles“* eine passende Zerschneidung. Immerhin brauchte er für die Zerschneidung des gleichseitigen Dreiecks in 4 Puzzleteile 9 Konstruktionsschritte, heute bekannt als ***Dudeneys Zerschneidung*** (Abb.15, 16, und 17). Übrigens hat *Dudeney* auch die Quadratur eines regelmäßigen 5-Ecks auf nur 6 Puzzleteile reduziert.

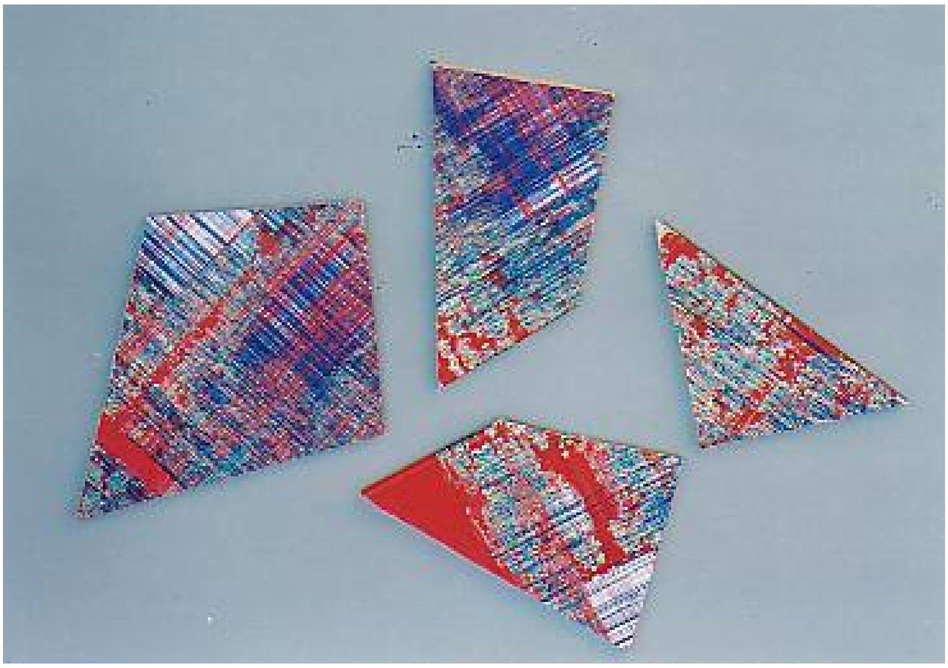


Abb.15

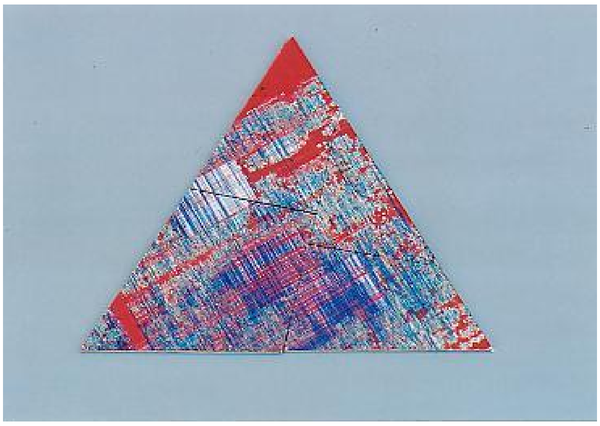


Abb.16

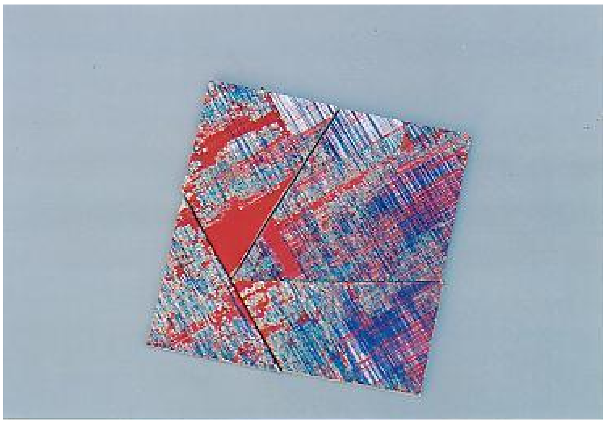


Abb. 17

Im KURIER (6.Juli 2003) erschien als Kopfnussrätsel die Zerlegung eines Rechtecks in 3 Teile derart, dass aus diesen ein Quadrat gelegt werden kann. SchülerInnen entdeckten bei einem Besuch im HdMa, dass außer dem Quadrat noch ein Dreieck, Parallelogramm und ein Trapez legbar sind. Wir nannten daher dieses Puzzle auch ***„Aus drei mach fünf“***, das wir in dieser Art auch bei der ***Kinderuniversität On Tour*** in dieser Form anbieten (Abb.18 und Abb.19).

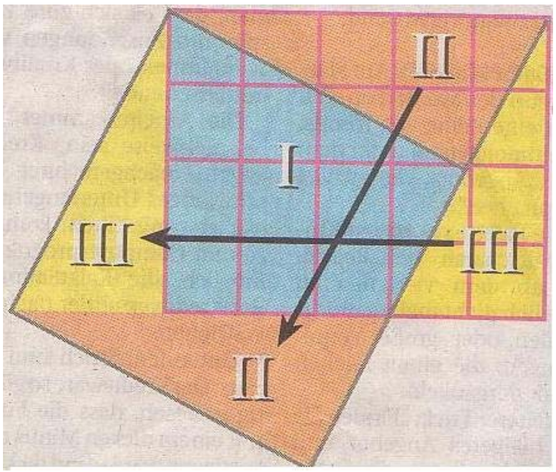


Abb. 18

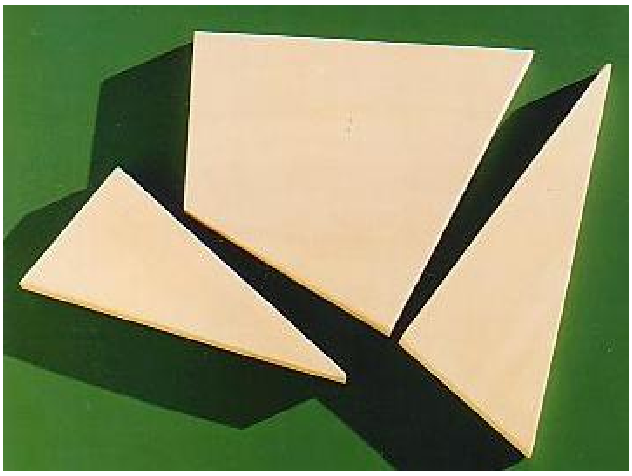


Abb. 19

Zum Abschluss möchte ich auch noch auf die Lösung eines Problems, nämlich die ***Dreiteilung eines Würfels in drei kongruente Körper*** hinweisen. ***Martin Gardner***, der bekannte Autor vieler Bücher über Unterhaltungsmathematik, leitete lange Zeit die Spalte *„Mathematical Games“* in der Zeitschrift *„Scientific American“.* Im Septemberheft des Jahres 1980 zeigte er, wie ein Würfel in drei kongruente Teilkörper (3 Quadratische Scheiben bzw. 3 Pyramiden) zerlegt werden kann (Abb.20 und 21) Die Leser wurden aufgefordert, eine völlig andere Lösung dieses Problems zu finden. *M. Gardner* erwähnte noch, dass er keine weiteren Lösungen dieses Problems kennt.

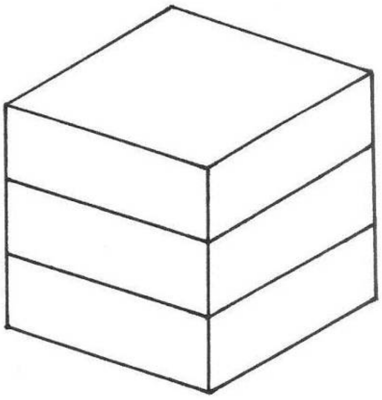


Abb. 20

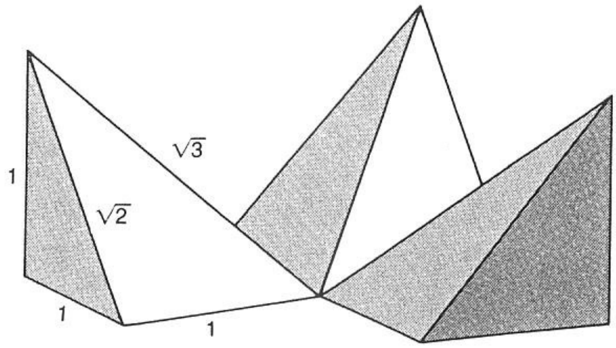


Abb. 21

Franz Vrabec fand viele weitere Lösungen, z.B. den in Abb.22 gezeigten Körper, der aus zwei quadratischen Pyramiden von halber Würfelhöhe besteht, die an einer ihren Seitenflächen miteinander verbunden sind. Drei solcher Körper lassen sich dann zu einem Würfel zusammensetzen. Ja, sogar unendliche Mengenfamilien von Lösungen konnte er angeben – wie auch viele andere Leser der Zeitschrift, wie im Dezemberheft 1980 von *„Scientific American*“ berichtet wurde!

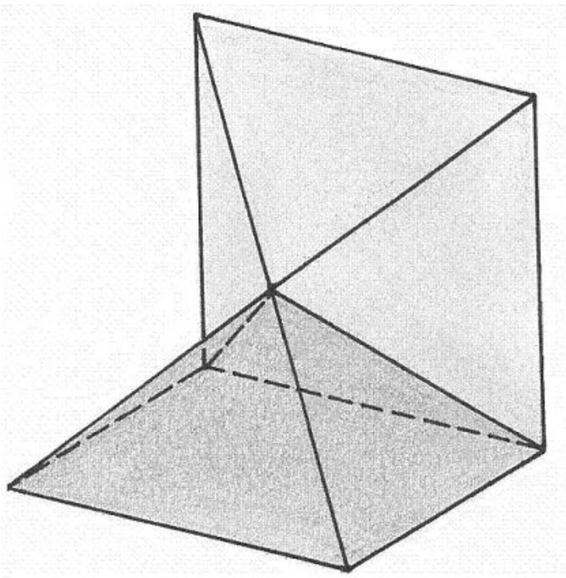


Abb. 22

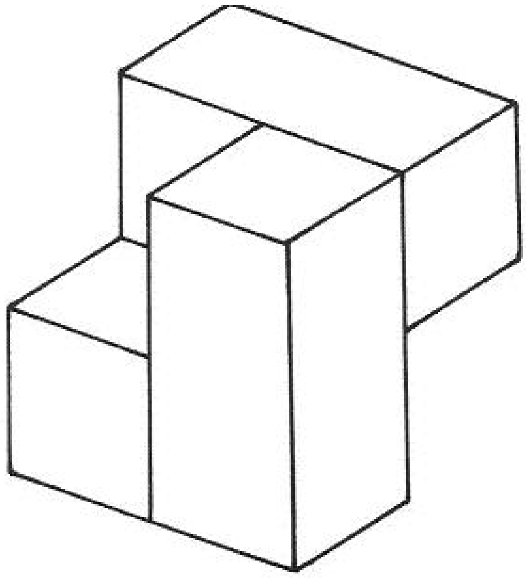


Abb. 23

Eine ungewöhnliche und sehr interessante Lösung dieses Problems fand er durch eine Zerlegung des Würfels in drei kongruente fraktale Teilkörper. Das Lösungsprinzip ist leicht zu verstehen. Drei quadratische Prismen (deren Grundfläche ein Viertel einer Würfelfläche beträgt und deren Höhe gleich der Würfelseite ist) lassen sich wie in Abb.23 gezeigt wird, so anordnen, dass links oben und rechts unten zwei Würfel der halben Seitenlänge frei bleiben. Mit diesen freien Würfel verfährt man nun so wie im ersten Schritt. Man füllt sie durch drei quadratische Prismen aus, die in ihren linearen Abmessungen nun halb so groß sind, wie die Prismen, mit denen man begonnen hat. Werden die neuen Prismen so angeordnet wie die des ersten Schrittes, so berühren sie diese und können mit ihnen verbunden werden. Die drei so entstandenen kongruenten Körper ergeben zusammengesetzt noch keinen Würfel, denn jetzt bleiben insgesamt vier Würfel von einem Viertel der Seitenlänge frei (Abb. 24). Wenn man nach diesem Prinzip weiter verfährt, entstehen drei kongruente Körper, von denen Abb.25 einen zeigt, der nach fünf Schritten entstanden ist.

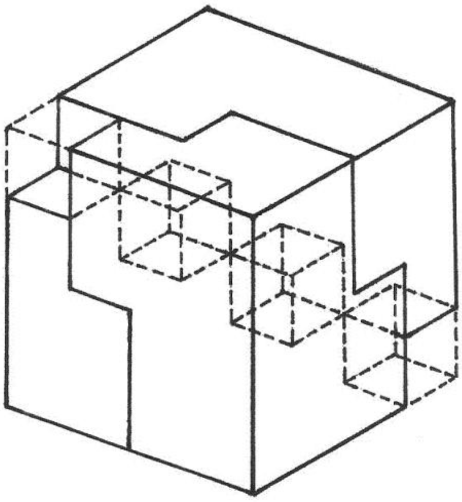


Abb. 24

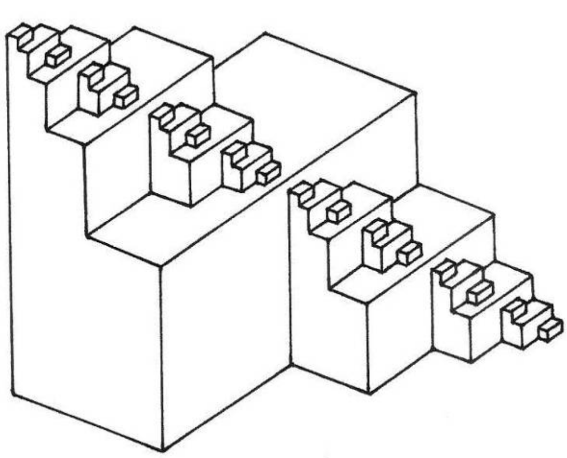


Abb. 25

Die Abb.26 und Abb.27 zeigen ein Modell, welches allerdings nur bis zur vierten Stufe ausgeführt ist. Denkt man sich diese Konstruktion unendlich oft durchgeführt, so entstehen drei fraktale Limeskörper, die zusammengesetzt exakt einen Würfel ergeben.

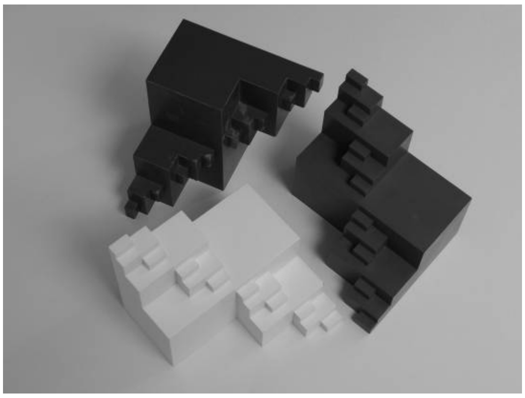


Abb. 26

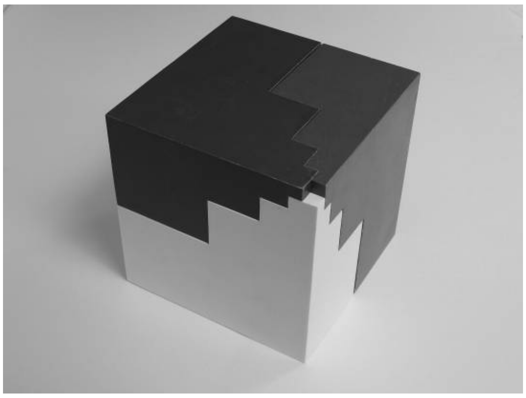


Abb. 27

Eine nette Aufgabe ist es, das Volumen eines solchen Limeskörpers auszurechnen – dabei muss ja 1/3 des Würfelvolumens herauskommen. Unter Verwendung der Summenformel für eine unendliche geometrische Reihe geht die Rechnung ganz einfach. Hat der Würfel das Volumen 1, so hat ein Prisma der erste Stufe das Volumen ¼; ein Prisma einer folgenden Stufe hat immer 1/8 des Volumens der vorhergehenden Stufe, da aber zu jedem Prisma immer zwei kleinere Prismen dazukommen, ist das Gesamtvolumen der Prismen einer Folgestufe gleich ¼ des Gesamtvolumens der vorigen Stufe. Damit ergibt sich das Volumen des Limeskörpers zu

$$\tfrac{1}{4} + \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^3 + \ldots = \tfrac{1}{4} * 4/3 = 1/3$$

wie zu erwarten war. Eine etwas schwierigere Aufgabe ist es, die Oberfläche dieser Körper in Abhängigkeit von ihrer Stufe auszurechnen, anschließend den Grenzübergang durchzuführen und so die Oberfläche des fraktalen Würfeldrittels zu berechnen (siehe dazu www.hausdermathematik.at: ERLEBNISWELT; VISUALISIERUNGEN).

Mag. Dr. Gerhard Lindbichler
Senfgasse 1/7/3
1100 Wien
gerhard.lindbichler@chello.at